ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

Concours d'admission 1982

****

CENTRE A L'ETRANGER

Programme M

MATHEMATIQUES II

(2 pages dactylographiées)

N.B.1. Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.
N.B.2. Dans la partie III, en particulier, on pourra utiliser des considérations géométriques.

***

Un espace affine euclidien orienté (E) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et aux axes associés Ox, Oy, Oz. L'objet du problème est l'étude de certaines configurations liées à la surface (T) engendrée par la rotation autour de Oz du cercle d'équation : $x^2 + z^2 - 2ax = 0$, $y = 0$, où a est une constante strictement positive, donnée une fois pour toutes. Une telle surface est appelée un tore de collier nul.

***

PARTIE I

Pour tout couple $(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2$, on définit le vecteur $\vec{u} = \vec{i} \cos\theta + \vec{j} \sin\theta$, et les points L et M par $\vec{OL} = a\vec{u}$, $\vec{LM} = a\vec{u}.\cos\phi + a\vec{k}\sin\phi$. Il est clair que le point M décrit le tore (T) tout entier quand θ et ϕ varient dans $\mathbb{R}$.

1) Quelles sont, en fonction de a, θ, ϕ, les coordonnées de M dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

2) En utilisant le résultat précédent, ou autrement, donner une équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$ du tore (T).

3) La section de (T) par le plan d'équation $x = a$ est notée (S). Appelant F et F' les points de coordonnées respectives (a, a, 0), (a,-a, 0), démontrer que le produit des distances MF et MF' est commun à tous les points M de (S).

4) On admettra sans démonstration la formule suivante, valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x \, dx = \frac{\pi}{2} C_k \quad , \quad \text{où } C_k = \frac{1.3.5... (2k-1)}{2.4.6... (2k)} .$$

a) Montrer qu'il existe une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels (que l'on précisera) telle que :

$$\forall \alpha \in [0,\tfrac{\pi}{2}] \quad , \quad (1 + \frac{\cos^2 2\alpha}{3})^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n \cos^{2n} 2\alpha$$

b) En admettant que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{\cos^2 2\alpha}{3})^{\frac{1}{2}} d\alpha = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma_n \cos^{2n} 2\alpha \, d\alpha$

établir qu'il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels (que l'on précisera) telle que "l'aire intérieure" à la courbe (S) s'écrive : $A = \pi\sqrt{3}\, a^2 \, (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n C_n^2)$

.../...

PARTIE II

On considère maintenant la courbe (C) décrite, sur le tore (T), par un point M assujetti à $\theta = \phi = t$, $t \in \mathbb{R}$.

1) Tracer la projection orthogonale (γ) de (C) sur le plan xOy.

2) Tracer la projection orthogonale (Γ) de (C) sur le plan yOz. Elle affecte la forme d'un "8" dont on déterminera les tangentes au point double et que l'on s'efforcera de placer vis à vis des droites d'équations $z = \pm a$ et des cercles d'équations $y^2 + z^2 \pm 2ay = 0$ (cette dernière question est assez délicate).

3) Calculer l'aire intérieure à chaque boucle de ce "8".

4) La partie de (T) telle que $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$ (quart de tore) est partagée en deux nappes (T_1) et (T_2) par la courbe (C), (T_2) étant la nappe bordée par le demi-cercle $x^2 + y^2 = 4a^2$, $z = 0$, $y \geqslant 0$.
Calculer les aires respectives A_1 et A_2 de (T_1) et (T_2).

***

PARTIE III

Désormais t représente le temps. On note :

$$\vec{u}(t) = \vec{i}.\cos t + \vec{j} \sin t \quad ; \quad \overrightarrow{O\,L(t)} = a\,\vec{u}(t) \quad ;$$
$$\overrightarrow{L(t)\,M(t)} = a\,\vec{u}(t) \cos t + a\,\vec{k} \sin t = a\,\vec{I}(t)$$

R_t désigne le repère $(L(t) ; \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$ avec :

$$\vec{K}(t) = \vec{u}(t) \wedge \vec{k} \quad ; \quad \vec{J}(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{I}(t)$$

R désigne le repère mobile par rapport à (E) dont la position dans (E) à la date t est R_t ;

On appelle (Σ) le solide lié à ce repère (R).

Soient $\vec{\Omega}(t)$ et $\Delta(t)$ le vecteur instantané et l'axe instantané, à l'instant t, dans le mouvement de (Σ) par rapport à (E).

1) Calculer les coordonnées de $\vec{\Omega}(t)$ dans les bases $(\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$ et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2)a) Donner une équation de la surface (G) engendrée dans (E) par $\Delta(t)$ quand t varie ; montrer qu'elle est de révolution ; préciser son axe et une méridienne.

b) $\Delta(t)$ est la position dans (E) à l'instant t d'une droite Δ_t liée à Σ. Etudier, comme en a), la surface (H) engendrée dans (Σ) par Δ_t quand t varie.

c) La surface (H), liée à (Σ), est mobile par rapport à (E). On note H(t) sa position dans (E) à l'instant t. Montrer que les surfaces (G) et H(t) ont en commun deux droites que l'on précisera et qu'elles se correspondent par symétrie par rapport à chacune de ces droites. En déduire qu'elles sont tangentes en chaque point de ces droites.

F I N
000

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail